ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Λύσεις Β΄ Γυμνασίου

1. Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$A=(111-144:12):11+1=(111-12):11+1=99:11+1=9+1=10$$

2. Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10 . Πράγματι $10\cdot 2+8\cdot 10=100.$

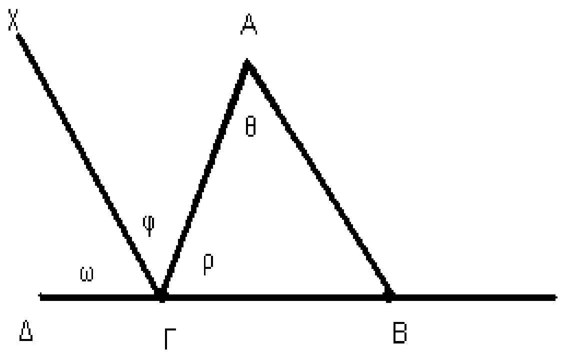
3. Έχουμε:

$$\frac{6}{100}\alpha=\frac{4}{100}\beta \ \ \textit{οπότε}\ \alpha=\frac{2}{3}\beta$$. Έτσι έχουμε

$$\kappa=\frac{9\cdot\frac{2}{3}\beta-3\beta}{6\cdot\frac{2}{3}\beta-\beta}=\frac{6\beta-3\beta}{4\beta-\beta}=\frac{3\beta}{3\beta}=1$$

4. Αφού η Γx είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ θα ισχύει $\omega=\phi$. Επειδή Γx//ΑΒ θα ισχύει $\phi=\theta$ και αφού ΑΒ=ΒΓ θα είναι $\theta=\rho$. Άρα $\omega=\phi=\theta=\rho$, και $\omega+\phi+\rho=180^0$, οπότε $\omega=\phi=\rho=60^0$

Άρα $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=60^0$.



ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
68^{ου} ΘΑΛΗΣ
24 Νοεμβρίου 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $\mathrm{A}=(200:8+12\cdot 100)+\left[200:(8+2)+762\right]\cdot\left[(-1)^{13}+(-1)^{12}+(-1)^{2007}\right]^2$

$=(25+1200)+(200:10+762)\cdot\left[(-1)+1+(-1)\right]^2$

$=1225+(20+762)\cdot(-1)^2$

$=1225+782\cdot 1=2007.$

2. Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή $\text{ΕΚΠ}\left[6,8,10\right]=120$, έπεται ότι $\omega\in\{120,240,360,480,...\}$ και αφού $300<\omega<400$, θα είναι $\omega=360.$

Αν x,y,z είναι ο αριθμός των μαθητών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\lambda \text{ και } x+y+z=360 .$$

Άρα είναι

$$x=5\lambda, y=4\lambda, z=3\lambda$$

$$\text{και } 5\lambda+4\lambda+3\lambda=360\Leftrightarrow 12\lambda=360\Leftrightarrow \lambda=30.$$

Άρα είναι: $x=5\cdot 30=150,\ y=4\cdot 30=120,\ z=3\cdot 30=90.$

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200\cdot 3=600$ ευρώ.

Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200\cdot\frac{10}{100}=20$ κιλά, οπότε του έμειναν

$$200-20=180 \text{ κιλά.}$$

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600+600\cdot\frac{20}{100}=720 \text{ ευρώ.}$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720:180=4$ ευρώ.

4. (α) Αν $x=\text{ΒΓ}$, $y=\text{ΑΔ}$ και $\text{ΑΕ}=\upsilon$, τότε $x=2y$ και

$$\frac{(x+y)\upsilon}{2}=\mathrm{E}=(\text{ΑΒΓΔ})\Leftrightarrow 3y\cdot\upsilon=2\mathrm{E}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=\frac{2\mathrm{E}}{3}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=200cm^2 .$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{E}(\text{ΑΒΔ})=\frac{1}{2}y\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 200cm^2=100cm^2 .$$

(β) $(\text{ΑΒΚΓ})=2(\text{ΑΒΓ})=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\upsilon=2(y\cdot\upsilon)=2\cdot 200=400cm^2.$

Διαφορετικά

Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει καθέτους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$(\text{ΑΒΚΓ})=\frac{1}{2}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΚ}=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 2\upsilon=2(y\cdot\upsilon)=2\cdot 200=400cm^2.$$

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = (4 \cdot 25)^2 + 502 + (27 - 25) \cdot 249 - 10^4$$
$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

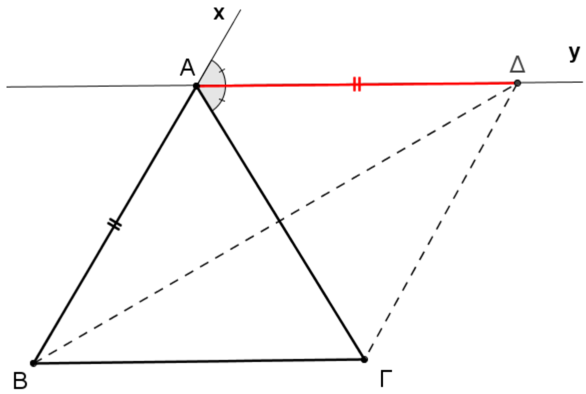
2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $\mathrm{A}y$ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η $\mathrm{A}y$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$ θα είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Delta\hat{\mathrm{A}}x$ είναι 59°.

Επειδή είναι $\mathrm{A}y \parallel \mathrm{B}\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{\mathrm{B}} = \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 59^0.$$

(β) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}. \qquad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και $\mathrm{A}y$ έχουμε ότι

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστα σης

$$\mathrm{A} = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι $\alpha = 9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$\mathrm{A} = 9 + 5(4+9) + 3(9-4) + 1919 = 9 + 5\cdot 13 + 3\cdot 5 + 1919 = 2008 .$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{A}_1 = \pi o\lambda.5 + 3 \\ \mathrm{A}_1 = \pi o\lambda.7 + 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.5 \\ \mathrm{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.7 \end{matrix}\right\},$$

οπότε ο αριθμός $\mathrm{A}_1 - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $\mathrm{A}_1 - 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < \mathrm{A} < 200 \Rightarrow \frac{60}{100}\cdot 100 < \frac{60}{100}\cdot \mathrm{A} < \frac{60}{100}\cdot 100 \Rightarrow 60 < \mathrm{A}_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $\mathrm{A}_1 = 108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{A} = 108 \cdot \frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2\cdot 108 = 216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{K} = 216 \cdot \frac{100}{80} = 270 .$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^o Λύση.

Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2^o ΄

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:
α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3^o

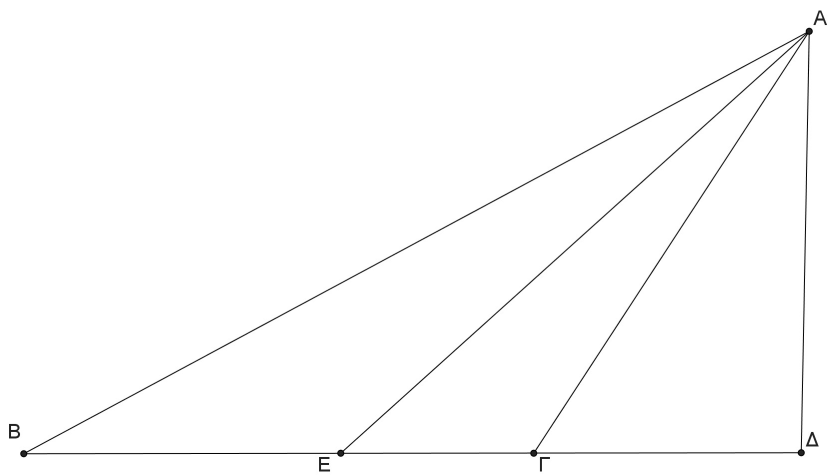
Λύση

α) Κατ’ αρχή έχουμε: $\hat{\mathrm{A}} = 180^0 - \left(\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0.$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\frac{\hat{\mathrm{B}}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{\mathrm{B}}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{\mathrm{B}} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{\mathrm{B}} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A\right) + \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{A} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{A}E = 50^0$.

Λύση (1ος τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40} = 68\cdot\frac{40}{17} = 4\cdot 40 = 160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12 = 32-12 = 20$ μαθητές.

2ος τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12 = x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480 = 40x \Leftrightarrow 17x = 2720 \Leftrightarrow x = 160.$$

β) $\frac{x}{5}-12 = \frac{160}{5}-12 = 20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

16	32	248
16	0	8 ,
0	0	8

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16,\ 32,\ 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $I\hat{\Delta}\Gamma = 70^0$ και $I\hat{E}\Gamma = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $B\hat{I}\Delta$ και $E\hat{I}\Gamma$.

Λύση

α. Εφόσον $I\Delta // AB$ θα ισχύει: $\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $I\Delta, AB$ τεμνομένων από την $B\Delta$).

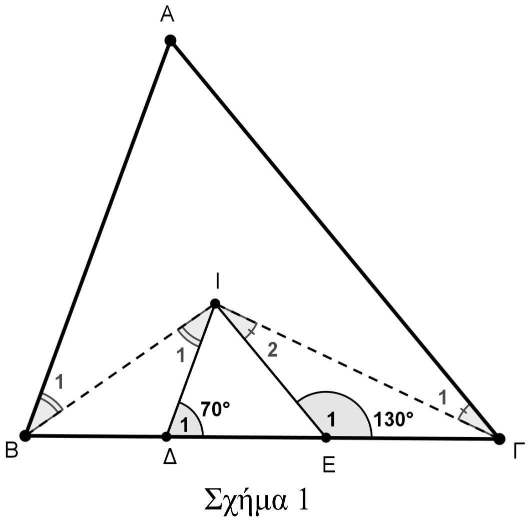
Επειδή είναι $IE // A\Gamma$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{E}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $IE, A\Gamma$ τεμνομένων από την $E\Gamma$).

Οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 180^o - \hat{B} - \hat{\Gamma} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

β. Επειδή η $I\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $I\Delta // AB$, θα ισχύει: $\hat{I}_1 = \hat{B}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{I}_1, \hat{B}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $I\Delta, AB$ που τέμνονται από την IB.



Σχήμα 1

Εφόσον $I\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $IE // A\Gamma$, οπότε θα ισχύει: $\hat{I}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{I}_2, \hat{\Gamma}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $IE, A\Gamma$ που τέμνονται από την $I\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120\cdot 13=1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560\cdot\frac{10}{100}=156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x\cdot\frac{150}{100}=\frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80\cdot x+120\cdot\frac{3x}{2}=2600 \Leftrightarrow 80x+180x=2600 \Leftrightarrow 260x=2600 \Leftrightarrow x=\frac{2600}{260}=10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3\cdot 10}{2}=15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120\cdot 15=1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800\cdot\frac{10}{100}=180$ κιλά λάδι.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση
$$A=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$
$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:
$$B=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση
Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$,έχουμε: $B=\frac{2}{2-\frac{1}{5}}:\frac{2-\frac{2}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{9}{5}}:\frac{2-1}{9}=\frac{10}{9}:\frac{1}{9}=\frac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $B=\frac{2}{5-\frac{1}{5}}:\frac{5-\frac{5}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{24}{5}}:\frac{\frac{5}{2}}{9}=\frac{10}{24}:\frac{5}{18}=\frac{10}{24}\cdot\frac{18}{5}=\frac{180}{120}=\frac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7 .$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

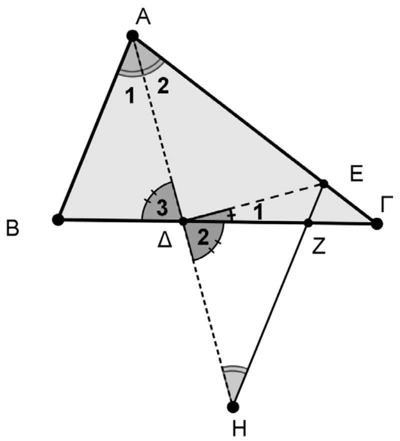
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^0$.

Λύση

1. Επειδή η $\mathrm{A\Delta}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.



Από την παραλληλία των ΑΒ και ZH, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{H}}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\mathrm{H}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $\mathrm{E\Delta}\perp\mathrm{AH}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$

2. Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\hat{\Delta}_3 .$$

Σχήμα 1

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{20^\circ}{2}=10^\circ .$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5}{39}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση

Είναι $\mathrm{MK\Delta}(12,30,54)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}.$

Για $\kappa=3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3}=\dfrac{0}{3}=0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{5}\neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

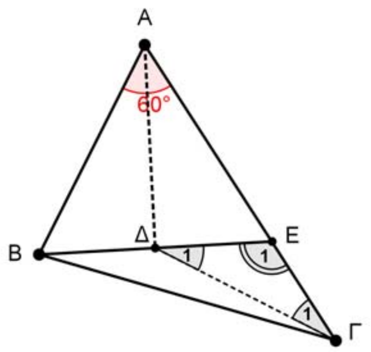
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2,5\cdot\frac{6}{100}=0,15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2,5-0,15=2,35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050+407=1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457:2,35=620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800\cdot\frac{8}{100}=64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800-\left(620+64\right)=116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathrm{A}}=60^{\circ}$ και $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{AB}$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $\mathrm{AB}=\alpha$.

Εφόσον $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\mathrm{AB}=\frac{3}{2}\alpha$ και $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}=\alpha$, έχουμε:

$$\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AE}=\frac{3}{2}\alpha-\alpha=\frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{AE}$) και η γωνία του $\hat{\mathrm{A}}$ είναι 60^{o}, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\Delta\mathrm{E}=\frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\Delta\mathrm{E\Gamma}$ είναι ισοσκελές, αφού $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{E\Gamma}=\frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{\mathrm{E}}_1=180^{\circ}-\mathrm{A\hat{E}B}=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ},$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1=\frac{180^{\circ}-120^{\circ}}{2}=30^{o}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12:4 + 53 + 3\cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Λύση

$$A = 32 - 12:4 + 53 + 3\cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9}\cdot 8 - \frac{74}{9}$$

$$= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100.$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση
(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360\cdot\frac{100}{85} = \frac{16\cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:
το $(100-20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε 1600 ευρώ.
Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600\cdot\frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ.}$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

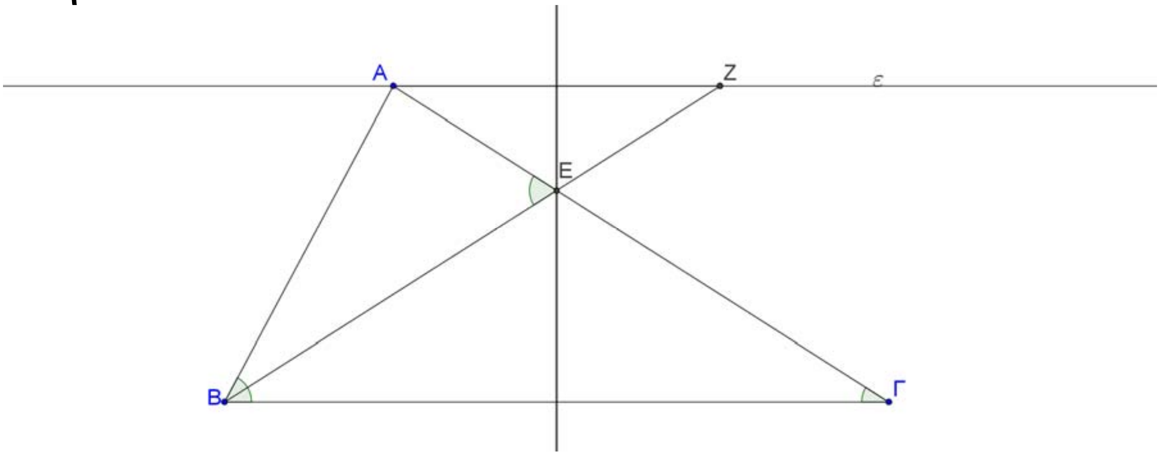
$$1600\cdot\frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.
(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε $2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

$$\frac{640}{2000}\cdot 100 = \frac{64}{2} = 32\,.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
(α) $AZ = AB$, **(β)** $A\hat{E}B = \hat{B}$.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη της ΒΓ έπεται ότι $\mathrm{EB}=\mathrm{E\Gamma}$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ προκύπτει $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\hat{\Gamma}$. Επειδή $\mathrm{AZ}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ έπεται ότι: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{\mathrm{B}}=2\cdot\hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΖ.

(β) Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, οπότε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma+\hat{\Gamma}=2\cdot\hat{\Gamma}=\hat{\mathrm{B}}$.

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1$^{\text{ος}}$ τρόπος)

Έστω α,β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha>\beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha=18\cdot 8+5\upsilon \text{ και } \beta=12\cdot 9+\upsilon.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow 5\alpha=7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$5\cdot(144+5\upsilon)=7\cdot(108+\upsilon)\Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720+25\upsilon=756+7\upsilon\Leftrightarrow 18\upsilon=36\Leftrightarrow\upsilon=2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha=154 \text{ και } \beta=110.$$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος.

Έχουμε: $\alpha=18\cdot 8+\upsilon_1$, με $\upsilon_1=0,1,2,...,17$ και $\beta=12\cdot 9+\upsilon_2$, με $\upsilon_2=0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1=5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1,\upsilon_2)=\{(0,0),(5,1),(10,2),(15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha=154$ και $\beta=110$ και το κλάσμα $\frac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\frac{7}{5}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8=\frac{13}{9}-\frac{74\cdot 3}{9\cdot 37}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}:8$$
$$=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}:8=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16:8}{9}=\frac{13}{9}-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200-x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200-x)\cdot\frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200\cdot\frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100}+(200-x)\cdot\frac{150}{100}=200\cdot\frac{140}{100}\Leftrightarrow 12,5x-15x+3000=2800$$
$$\Leftrightarrow 2,5x=200\Leftrightarrow x=80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200-80=120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015},\ \frac{1007}{2019},\ \frac{1009}{2021},\frac{997}{2009},\ \frac{1011}{2023},\ \frac{999}{2011},\ \frac{1001}{2013},\ \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015},\ \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019},\ \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021},\frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023},\ \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011},\ \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013},\ \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{2012}{2009}>\frac{2012}{2011}>\frac{2012}{2013}>\frac{2012}{2015}>\frac{2012}{2017}>\frac{2012}{2019}>\frac{2012}{2021}>\frac{2012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{2012}{2009}<1-\frac{2012}{2011}<1-\frac{2012}{2013}<1-\frac{2012}{2015}<1-\frac{2012}{2017}<1-\frac{2012}{2019}<1-\frac{2012}{2021}<1-\frac{2012}{2023},$$

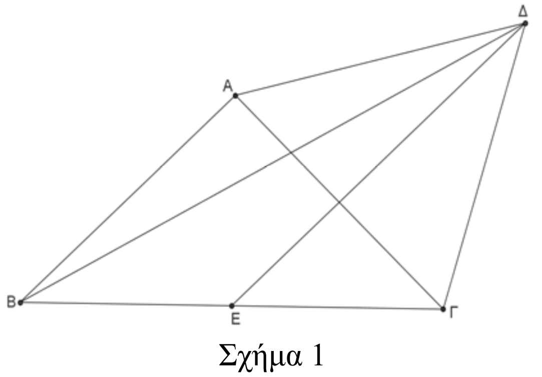
οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς, ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

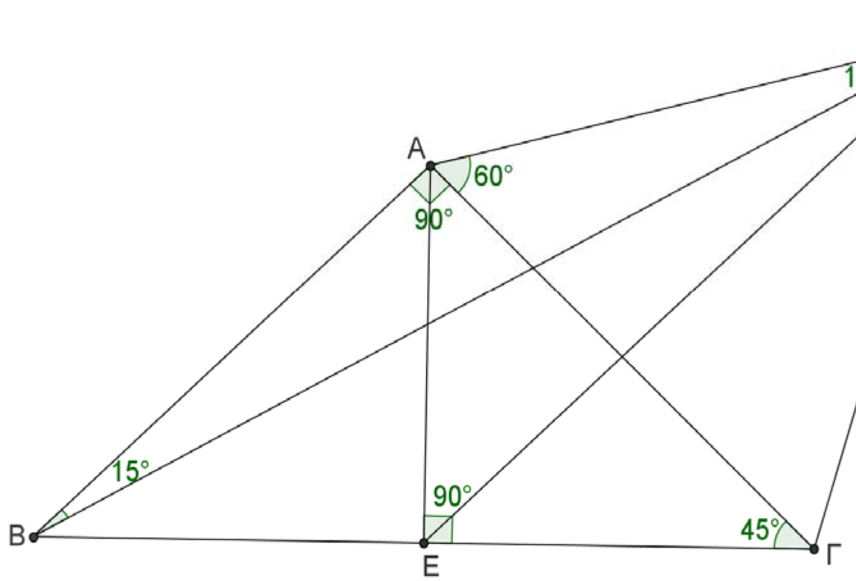
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{Β} = \hat{Γ} = 45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $Ε\hat{Α}Γ = 180^\circ - \left(90^\circ + 45^\circ\right) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΓ$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $ΔΑ = ΔΓ$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $Δ\hat{Α}Γ = 60^\circ$, οπότε $Δ\hat{Α}Β = Δ\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Β = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Β}Δ = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$Β\hat{Δ}Ε = Α\hat{Β}Δ = 15^\circ$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad \mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11} = 24:6+25-2\cdot 8+8:4+\frac{9}{11} = 4+25-16+2+\frac{9}{11}$$

$$=15+\frac{9}{11}=15\frac{9}{11}.$$

$$\mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=\left(32+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=144:9-1+\frac{5}{7}=16-1+\frac{5}{7}$$

$$=15+\frac{5}{7}=15\frac{5}{7}.$$

Έχουμε: $\mathrm{A}-\mathrm{B}=15\frac{9}{11}-15\frac{5}{7}=15+\frac{9}{11}-15-\frac{5}{7}=\frac{9}{11}-\frac{5}{7}=\frac{63-55}{77}=\frac{8}{77}>0$,
οπότε θα είναι $\mathrm{A}>\mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2
Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha=6$ μέτρα και πλάτος $\beta=4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:
(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση
Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2(\alpha+\beta)=2(6+4)=20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta=6\cdot 4=24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6+6\cdot\frac{20}{100}=6+1,2=7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4-4\cdot\frac{5}{100}=4-0,2=3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$\Pi' = 2(7,2+3,8) = 2\cdot 11 = 22$ μέτρα, οπότε η αύξησή της είναι

$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2$ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$E' = 7,2\cdot 3,8 = 27,36$ τετρ.μέτρα, οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι

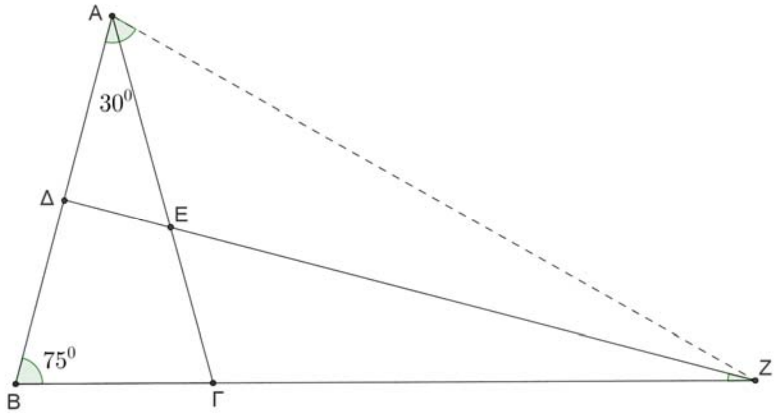
$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36$ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι

$$\frac{E' - E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ θα έχει τις απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A = \frac{180^\circ - B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΒ θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι ΖΑ = ΖΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $B\hat{A}Z = A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma = 75^\circ$. Τότε θα είναι $A\hat{Z}B = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη ΖΔ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΖΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας του $A\hat{Z}B$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\Delta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{\Delta}Z = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}Z$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}Z = B\hat{A}Z - B\hat{A}\Gamma = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$.

Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

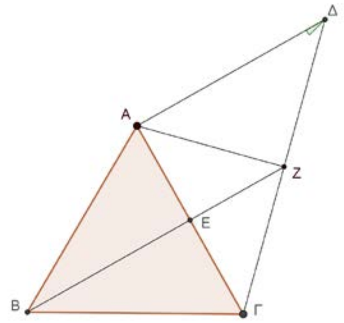
Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

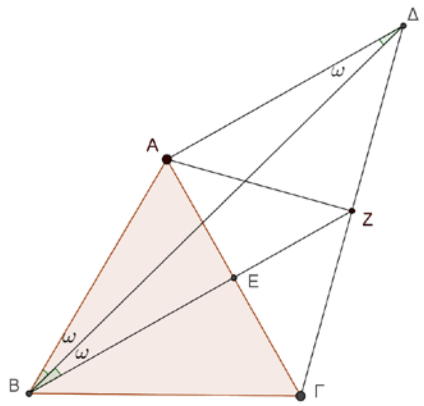
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$
$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.



Λύση
(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $A\Delta = \alpha$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta \qquad (1)$$

Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $BE \parallel A\Delta$, οπότε

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}E \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E. \qquad (3)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}E$, οπότε θα έχουμε

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E = \frac{A\hat{B}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, δηλαδή $A\hat{B}E = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $A\hat{\Delta}B = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100}=540 \Leftrightarrow \left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\beta=540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100}\cdot\beta=540\alpha \Leftrightarrow \beta=\frac{540\alpha\cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta=\frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $A = 88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Λύση

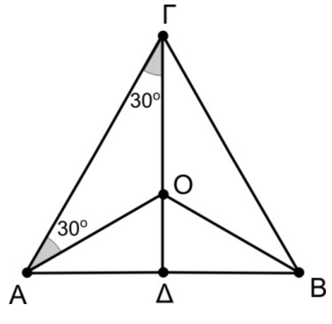
$$A=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$=\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^3+\left(\frac{-15}{-3}\right)^3\right)\cdot(-2)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-(-4)^2$$

$$=\left((-5)^3+(+5)^3\right)\cdot(-2)^3+(-4)^2-(-4)^2$$

$$=\left(-5^3+5^3\right)\cdot(-2)^3+16-16=0\cdot(-2)^3+0=0.$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = 30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

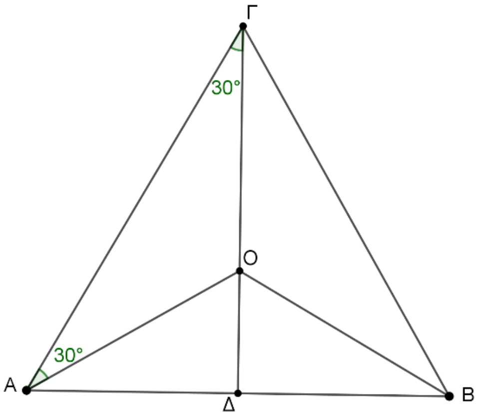


Λύση
(α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση τη ΑΒ, έχουμε ότι $\Gamma A=\Gamma B$ και $OA=OB$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΒ, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως τέμνει κάθετα την ΑΒ στο μέσο της, δηλαδή ΑΔ = ΔΒ.

(β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ$ Επομένως

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma,$$

οπότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \dfrac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \dfrac{5}{100} = \dfrac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ},$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο Α έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018\\&=\left(\left(-\frac{10}{2}\right)^{2\nu+1}+\left(+\frac{15}{3}\right)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^{2\nu}-\left(-\frac{4}{1}\right)^{2\nu}+2018\\&=\left((-5)^{2\nu+1}+(+5)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+(-4)^{2\nu}-(-4)^{2\nu}+2018\\&=\left(-5^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+2018=-5^{2\nu-1}\left(5^2-1\right)2017^2+2018\\&=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot2017^2+2018=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot4068289+2018.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε A,B το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
10 Νοεμβρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

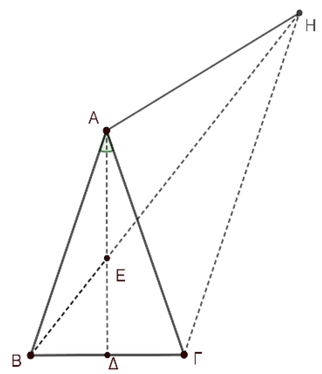
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right).$$

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right)\\&=\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^3+\left(\frac{-12}{-3}\right)^3+10\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^2+\left(\frac{-12}{-3}\right)^2-22\right)\\&=\left((-4)^3+(+4)^3+10\right)\cdot\left((-4)^2+(+4)^2-22\right)\\&=\left(-4^3+4^3+10\right)\cdot(16+16-22)=10\cdot10=100.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{B}=20°$,
(β) $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{H}=40^\circ$,
(γ) η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\Gamma$.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\widehat{A} = 40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, θα είναι $\hat{A}_1 = B\hat{A}E = 20^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές, συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 20^\circ$. Επειδή τέλος το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $AB = AH$, θα ισχύει: $A\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$.

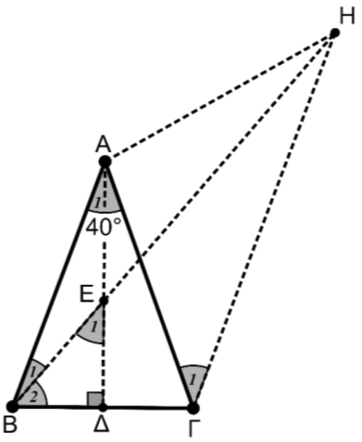
(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $A\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$ θα είναι

$$B\hat{A}H = 180^\circ - \left(20^\circ + 20^\circ\right) = 140^\circ$$

Όμως έχουμε ότι:

$$B\hat{A}H = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}H \Rightarrow 140^\circ = 40^\circ + \Gamma\hat{A}H \Rightarrow \Gamma\hat{A}H = 100^\circ.$$

Επειδή $A\Gamma = AB = AH$, το τρίγωνο ΓΑΗ είναι ισοσκελές, οπότε



Σχήμα 1

$$2 \cdot A\hat{\Gamma}H = 180^\circ - \Gamma\hat{A}H \Rightarrow A\hat{\Gamma}H = \frac{180^\circ - \Gamma\hat{A}H}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $A\hat{H}\Gamma = A\hat{\Gamma}H = 40^\circ$, ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $A\hat{H}B = 20°$, Επομένως θα έχουμε

$$B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}\Gamma - A\hat{H}B = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

δηλαδή $B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}B = 20^\circ$, οπότε η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε x ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματα του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

$$x=\frac{x}{2}+50 \Leftrightarrow x-\frac{x}{2}=50 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=50 \Leftrightarrow x=100.$$

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.
Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε y ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y=\frac{y}{2}+40+100 \Leftrightarrow y-\frac{y}{2}=100+40 \Leftrightarrow \frac{y}{2}=140 \Leftrightarrow y=280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.
Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε z ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z=\frac{z}{2}+30+280 \Leftrightarrow z-\frac{z}{2}=280+30 \Leftrightarrow \frac{z}{2}=310 \Leftrightarrow z=620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι α,β και γ, με $\alpha<\beta<\gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β,γ, να βρείτε τις δυνατές τιμές των α,β,γ.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α,β και γ είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής

$\alpha=72\kappa,\ \beta=72\lambda,\ \gamma=72\mu$ (όπου κ,λ,μ διαφορετικοί ανά δύο με $\kappa<\lambda<\mu$).

Επειδή πρέπει οι αριθμοί α,β και γ να είναι και διαιρέτες του $1008=14\cdot 72$, πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa}=\frac{72\cdot 14}{72\kappa}=\frac{14}{\kappa},\quad \frac{1008}{72\lambda}=\frac{72\cdot 14}{72\lambda}=\frac{14}{\lambda},\quad \frac{1008}{72\mu}=\frac{72\cdot 14}{72\mu}=\frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι κ,λ,μ να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.
Λόγω της προϋπόθεσης $\kappa<\lambda<\mu$ οι δυνατές τιμές για την τριάδα (κ,λ,μ) είναι: $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$.
Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$, τότε $\alpha=72,\beta=144,\gamma=504$, η οποία είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)=72$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$, τότε $\alpha=72,\beta=144,\gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 144=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$, τότε $\alpha=72,\beta=504,\gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$, τότε $\alpha=144,\ \beta=504,\ \gamma=1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha=72, \beta=144,\ \gamma=504$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\text{A}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\text{A}&=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200\\&=\left(\left(\frac{-20}{4}\right)^{11}+\left(\frac{-25}{-5}\right)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^{20}-\left(\frac{4}{1}\right)^{20}\right)+200\\&=\left((-5)^{11}+(+5)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left((-4)^{20}-4^{20}\right)+200\\&=\left(-5^{11}+5^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(4^{20}-4^{20}\right)+200=0\cdot(-2018)^2+0+200=200.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Λύση

Ονομάζουμε Α το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, Β του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι Α = 120 γραμμάρια και

$$\frac{\text{A}+\text{B}}{2}=115\Leftrightarrow \text{A}+\text{B}=230\Leftrightarrow 120+\text{B}=230\Leftrightarrow \text{B}=230-120=110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.
Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι: