ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
$68^{ου}$ ΘΑΛΗ 24 Νοεμβρίου 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.
$$\mathrm{A}=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4=-\left[2^8:4^2+4^2\right]:2^4$$
$$=-\left[2^8:\left(2^2\right)^2+4^2\right]:2^4=-\left(2^8:2^4+4^2\right):2^4$$
$$=-\left(2^4+4^2\right):2^4=-32:16=-2.$$
$$\mathrm{B}=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right]$$
$$=-x+3-3y+12-(xy-2x-yx-3y)$$
$$=-x-3y+15-xy+2x+xy+3y=x+15.$$
$$\mathrm{A}>\mathrm{B}\Leftrightarrow -2>x+15\Leftrightarrow -x>17\Leftrightarrow x<-17.$$

2. (α) $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και ε).
Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και ΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=40^\circ$ προκύπτει ότι
$$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-\hat{\mathrm{A}}}{2}=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ.$$
Άρα έχουμε
$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=70^\circ,$$
οπότε θα είναι
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=180^\circ-2\cdot 70^\circ=40^\circ$$
$$\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}x=40^\circ.$$
(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΓ, οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}=\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}.$$
Επειδή είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{B}\Gamma$ θα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K}=\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z},$$
οπότε θα είναι και
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K},$$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΑΖ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma=\{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b\in\{0,1,4,5,6,9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b\in\{1,5,9\}$.

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:
$$3a+2b=\text{πολλαπλάσιο του } 9. \qquad (1)$$

- Για $b=1$ λαμβάνουμε $3a+2=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=5$ λαμβάνουμε $3a+10=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=9$ λαμβάνουμε $3a+18=\pi o\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a\in\{3,6,9\}$. Άρα είναι $\mathrm{A}=33399$ ή $\mathrm{A}=66699$ ή $\mathrm{A}=99999$.

4. **(α)** Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B\hat{O}\Gamma}=2\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R=\mathrm{B\Gamma}=\alpha$. Επιπλέον $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

Άρα είναι $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}=2\cdot 75^\circ=150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}(\mathrm{OAE\Gamma})=\pi\alpha^2\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}=\frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ) και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=75^\circ$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $\mathrm{OA}\perp\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{A\Delta}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ θα είναι και $\mathrm{OA}\perp\mathrm{B\Gamma}$, οπότε η ΟΑ περνάει από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{O\Gamma}^2-\mathrm{M\Gamma}^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\frac{3\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\mathrm{OM}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι $\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=\alpha\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\alpha^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

.

69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ” ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad \mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

Λύση

Επειδή $1-\left(-1\right)^{2009}=1-\left(-1\right)=2\neq 0$ έχουμε $\left[1-\left(-1\right)^{2009}\right]^0=1$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}=\frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4-3^4+x=x.$$

Επίσης έχουμε

$$\mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}=\frac{\left(4+1\right)^2}{5}+\frac{x}{2}=5+\frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\Leftrightarrow x=5+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2x=10+x\Leftrightarrow x=10.$$

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2,4\lambda-1))$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος *λ*,

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α προς τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda+2>0 \text{ και } 4\lambda-1>0\Leftrightarrow \lambda<2 \text{ και } \lambda>\frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda=1$.

(β) Για $\lambda=1$ είναι $\mathrm{A}\left(1,3\right)$, οπότε

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

(γ)

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{OAB\Gamma}\right)=1\cdot 3=3$$

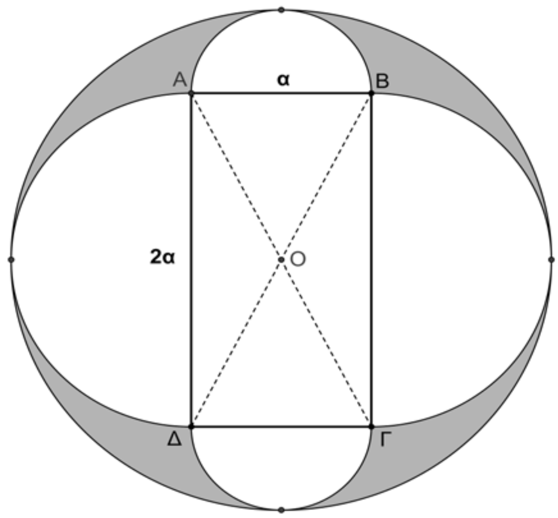
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα α.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2=\frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$, τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2=\pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\frac{9\pi\alpha^2}{4}-\frac{\pi\alpha^2}{4}-\pi\alpha^2-2\alpha^2=\frac{4\pi\alpha^2-8\alpha^2}{4}=(\pi-2)\alpha^2.$$

4. Αν ισχύει $\frac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{45^\nu.2^{2\nu}}{6^\nu}=900\Leftrightarrow\frac{45^\nu\cdot 4^\nu}{6^\nu}\Leftrightarrow\left(\frac{45\cdot 4}{6}\right)^\nu=900\Leftrightarrow 30^\nu=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2.$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu=(2\cdot 3\cdot 5)^2\Leftrightarrow 30^\nu=30^2\Leftrightarrow 30^{\nu-2}=1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\nu-2=0\Leftrightarrow\nu=2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $\nu-2$ η τιμή της δύναμης $30^{\nu-2}$ δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^2-(-1)^{2+1}+4(-1)^{2+2}=2003\cdot 1-(-1)+4\cdot 1=2003+1+4=2008..$$

71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=7x+10y-3w-87$.

Λύση

Έχουμε $x+y=3\cdot(-2)^2=3\cdot 4=12$ και

$$y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{24}.$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^{24}=1^{24}=1.$$

Άρα είναι:

$$A=7x+10y-3w-87=7x+7y+3y-3w-87$$
$$=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot 12+3\cdot 1-87=84+3-87=0.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Λύση

Έστω $\overline{xyzw}=1000\cdot x+100\cdot y+10\cdot z+w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το **(α)** θα είναι $w=0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το **(β)** θα είναι $z=0$ ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το **(γ)** θα είναι $y=1$ ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100},\ \overline{x124},\ \overline{x148},\ \overline{x500},\ \overline{x524},\ \overline{x548}.$$

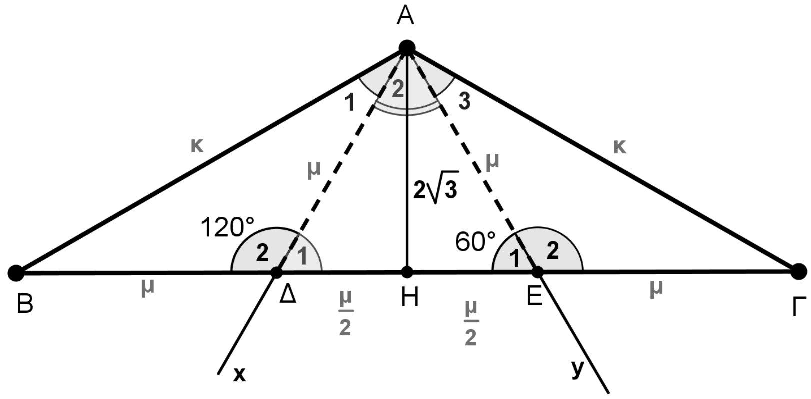
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς $4500, 4524, 4548$, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε , αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B=120^0$, $A\hat{E}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\Delta}_2 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 120^{o}$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 60^{o}$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι $\hat{\mathrm{E}}_1 = 60^{o}$. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

β. Εφόσον οι ημιευθείες ΑΔ (Ax) και ΑΕ (Ay) είναι κάθετες προς τις ΑΓ και ΑΒ, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - 90^{\circ} = 120^{0} - 90^{\circ} = 30^{o}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν: $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$ (από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ), $\hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{E}}_2 = 120^{o}$ και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = 30^{o}$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ είναι ίσα και συνεπώς $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΔΓ που έχουν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 60^{\circ} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 30^{0}$, δηλαδή ΑΒΓ ισοσκελές.

γ. Έστω μ το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ και κ το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε:

$$\mathrm{A}\Delta^2 = \mathrm{AH}^2 + \Delta\mathrm{H}^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $12 + 8\sqrt{3}$.

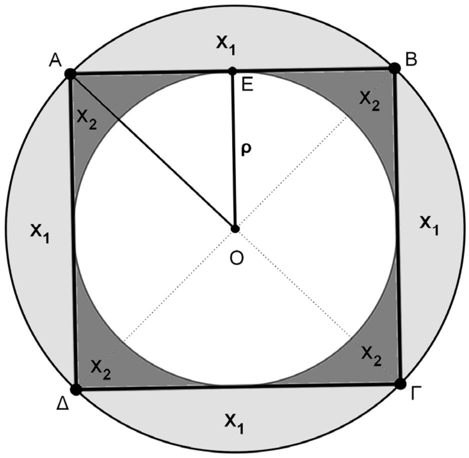
Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΕ είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ. Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(\mathrm{O},\rho)$ και $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα έχουν λόγο $\dfrac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\dfrac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O,x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O,\rho,OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΕ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε $OA^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow OA^2=2\rho^2 \Leftrightarrow OA=\rho\sqrt{2}$, οπότε είναι

$$E\big(\Delta(O,\rho,OA)\big)=\pi\big(\rho\sqrt{2}\big)^2-\pi\rho^2=2\pi\rho^2-\pi\rho^2=\pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Άρα είναι

$$E(X_1)=\pi\big(\rho\sqrt{2}\big)^2-(2\rho)^2=2\pi\rho^2-4\rho^2=(2\pi-4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου X_2 προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικό δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας ρ , δηλαδή

$$E(X_2)=(2\rho)^2-\pi\rho^2=4\rho^2-\pi\rho^2=(4-\pi)\rho^2.$$

Άρα είναι $\dfrac{E(X_1)}{E(X_2)}=\dfrac{2\pi-4}{4-\pi}$ και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)}=\frac{2\pi-4}{4-\pi}>\frac{13}{5}\Leftrightarrow 5(2\pi-4)>13(4-\pi)\Leftrightarrow 23\pi>72\Leftrightarrow \pi>\frac{72}{23}\cong 3{,}1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι $\pi\cong 3{,}14$.

(γ) Θα πρέπει να είναι $\rho<x<\rho\sqrt{2}$ και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\Big[\big(\rho\sqrt{2}\big)^2-x^2\Big]=\pi\big(x^2-\rho^2\big)\Leftrightarrow 2\rho^2-x^2=x^2-\rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2=3\rho^2\Leftrightarrow x^2=\frac{3\rho^2}{2}\Leftrightarrow x=\rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$72^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2, \beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2 \text{ και } \gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2 .$$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4}\right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^2\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^2\right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x .$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \le 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \le 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \le 8 \Leftrightarrow x \le 3 .$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \le 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \le 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \le 8x \Leftrightarrow 3 \le 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \le x \le 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon)\|(\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4.$$

(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε). Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

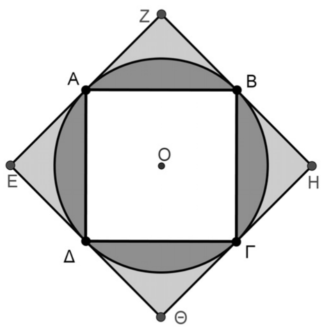
$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3,1415$).

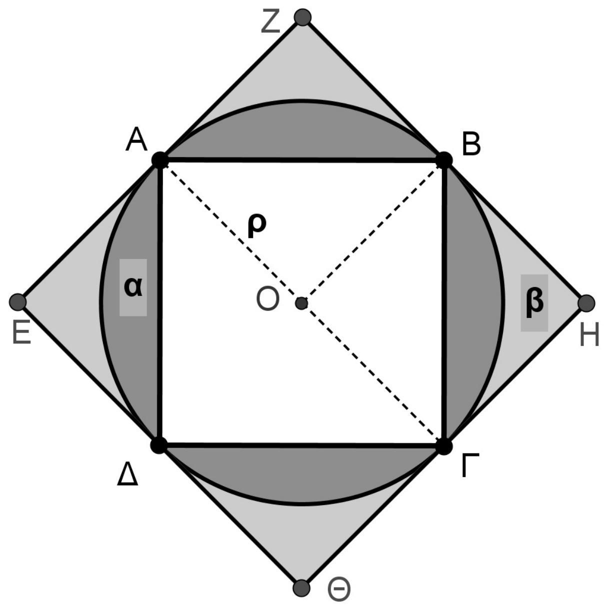
Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp\mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $\text{ΟΑ} \perp \text{ΕΖ}$ και $\text{ΟΓ} \perp \text{ΗΘ}$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\text{Ο}, \rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\text{ΖΗ} = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots., \text{ που ισχύει.}$$

73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έχουμε:

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8} = \left(2^2\right)^{-8} = 2^{-16}, z = 8^{-6} = \left(2^3\right)^{-6} = 2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\mathrm{A} = x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182} = \left(2^{-10}\right)^2 \cdot \left(2^{-16}\right)^4 \cdot \left(2^{-18}\right)^6 \cdot 2^{182}$$
$$= 2^{-20} \cdot 2^{-64} \cdot 2^{-108} \cdot 2^{182} = 2^{-10}.$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\Pi = 3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1} = 3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^4 \cdot 3^6\right)^{-1} = 3 \cdot \left[2^2 \cdot 3^3 \left(13 + 2^2 \cdot 3^3\right)\right]^{-1}$$
$$= 3 \cdot \left(2^2 \cdot 3^3 \cdot 121\right)^{-1} = 3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 121^{-1} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K} = \frac{2^{-10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 121^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 121}{2^8} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^8} = \left(\frac{33}{2^4}\right)^2 = \left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha\left(x - 3\right) + 2\left(\alpha - 1\right).$$

Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4 \cdot 3 - 5\alpha + 2 < \alpha\left(3 - 3\right) + 2\left(\alpha - 1\right) \Leftrightarrow 12 - 5\alpha + 2 < 2\alpha - 2 \Leftrightarrow 16 < 7\alpha \Leftrightarrow \alpha > \frac{16}{7}.$$

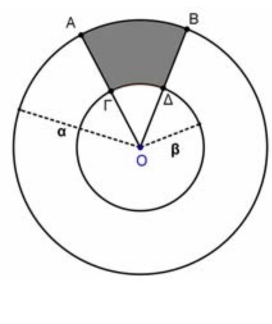
Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4 \cdot (-3) - 5\alpha + 2 < \alpha\left(-3 - 3\right) + 2\left(\alpha - 1\right) \Leftrightarrow -12 - 5\alpha + 2 < -6\alpha + 2\alpha - 2$$
$$\Leftrightarrow -8 < \alpha \Leftrightarrow \alpha > -8.$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης , όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha > \frac{16}{7}$ και $\alpha > -8$, δηλαδή όταν $\alpha > \frac{16}{7}$.

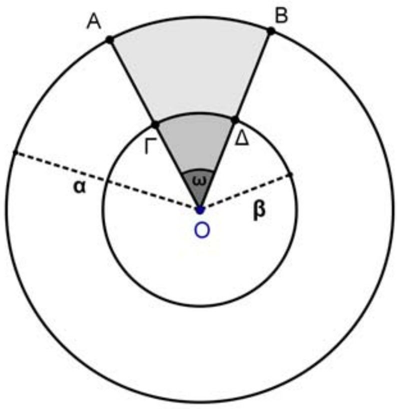
Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O, α) και (O, β), $0 < \beta < \alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = \mathrm{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:



$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$

Λύση



Το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\left(\mathrm{O},\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και $\left(\mathrm{O},\widehat{\Gamma\Delta}\right)$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\Gamma\right)=\pi\alpha^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}-\pi\beta^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\omega}{2}\ .$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους $\left(\mathrm{O},\alpha\right)$ και $\left(\mathrm{O},\beta\right)$, $0<\beta<\alpha$, ισούται με $\mathrm{E}\left(\mathrm{O},\beta,\alpha\right)=\pi\left(\alpha^2-\beta^2\right)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\Gamma\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{O},\beta,\alpha\right)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\omega}{2\pi\left(\alpha^2-\beta^2\right)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu2\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, έχουμε

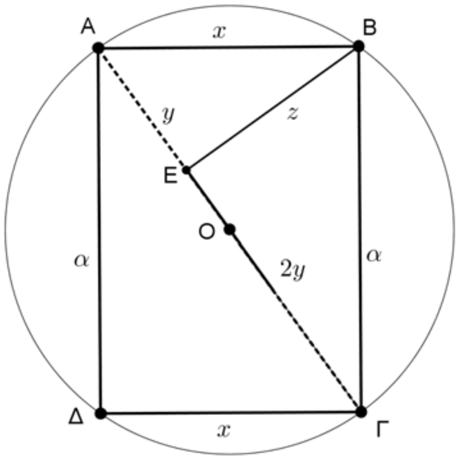
$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu2\omega\right)^3=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)^3=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A}\Delta=\alpha$ cm και $\mathrm{AB}<\mathrm{A}\Delta$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $\mathrm{E}\Gamma=2\cdot\mathrm{AE}$, να βρείτε:

- **(i)** το μήκος της πλευράς ΑΒ
- **(ii)** Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



(i) Έστω $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta=x$, $\mathrm{AE}=y$, $\mathrm{E\Gamma}=2y$ και $\mathrm{BZ}=z$.
Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ABE έχουμε:

$$x^2=y^2+z^2 \Rightarrow z^2=x^2-y^2. \qquad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΒΓΕ έχουμε:

$$\alpha^2=4y^2+z^2 \Rightarrow z^2=\alpha^2-4y^2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2-4y^2=x^2-y^2 \Rightarrow x^2=\alpha^2-3y^2 \qquad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$9y^2=x^2+\alpha^2 \Rightarrow x^2=9y^2-\alpha^2. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2-\alpha^2=\alpha^2-3y^2 \Rightarrow y^2=\frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2=\alpha^2-3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2=\alpha^2-3\cdot\frac{\alpha^2}{6}=\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $\mathrm{A\Gamma}=3y$, οπότε η ακτίνα του είναι $R=\frac{3}{2}y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Το εμβαδό του κύκλου είναι $E=\pi R^2=\pi\cdot\frac{6\alpha^2}{16}=\frac{3\pi\alpha^2}{8}$.

74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=3\cdot(3\alpha-4,6)-2\cdot(\alpha-0,2).$$

Λύση
Έχουμε: $4<5$, οπότε $\sqrt{4}<\sqrt{5}\Rightarrow 2<\sqrt{5}$. Είναι
$2,1^2=4,41,\ 2,2^2=4,84$ και $2,3^2=5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha=2,2$.
Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $\mathrm{A}=2$

Πρόβλημα 2
Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4<1-2\beta<5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<\frac{x}{\beta}.$$

Λύση
Έχουμε $-4<1-2\beta<5 \Leftrightarrow -5<-2\beta<4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2}<\frac{-2\beta}{-2}<\frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2<\beta<\frac{5}{2}$. Επειδή ο β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta=1$ ή $\beta=2$.

- Για $\beta=1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<x \Leftrightarrow x>1$.
- Για $\beta=2$ η ανίσωση γίνεται:
$2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<\frac{x}{2} \Leftrightarrow 0\cdot x<-1$, η οποία είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45^0 και επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

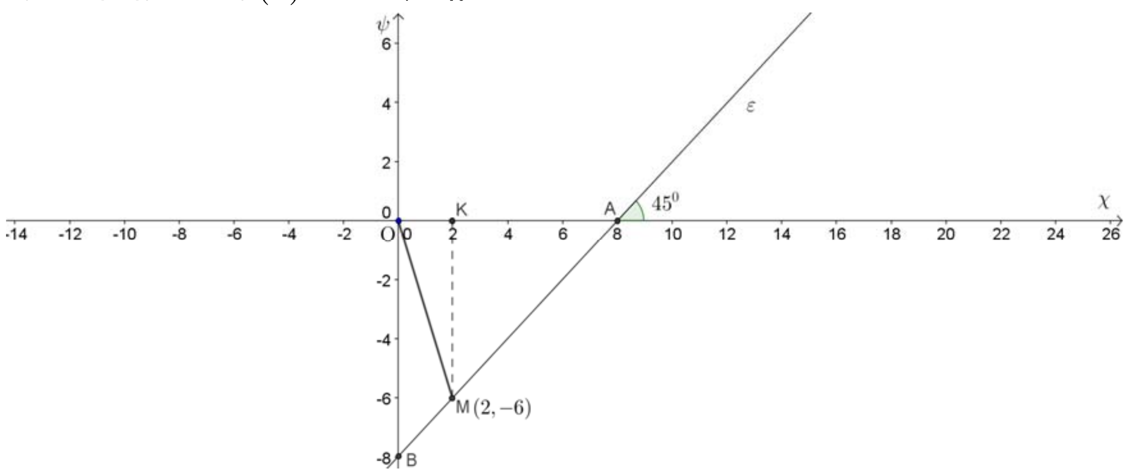
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi=\alpha\chi+\beta$, όπου $\alpha=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$ έχουμε ότι $-6=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι : $\psi=\chi-8$



Σχήμα 2

β) Τα σημεία τομής με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι τα $\mathrm{A}(8,0)$ και $\mathrm{B}(0,-8)$. Άρα έχουμε

$$(\mathrm{OAB})=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32 \text{ τετρ. μονάδες}$$

γ) Αν Κ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$, τότε το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ορθογώνιο στο Κ και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $\mathrm{KM}=6$ και $\mathrm{KA}=6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{KM}^2+\mathrm{KA}^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{64\cdot 2}=8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΑΒ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Ο, έστω υ, έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{OAM})}{(\mathrm{OAB})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AM}\cdot \upsilon}{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \upsilon} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$(\mathrm{OAM}) = \frac{3}{4}(\mathrm{OAB}) = \frac{3}{4}\cdot 32 = 24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Παρατήρηση:

Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΜ, μπορούμε να το υπολογίσουμε, παρατηρώντας ότι η ΚΜ είναι ύψος του τριγώνου ΟΑΜ (έχει μήκος 6) και η ΟΑ βάση με μήκος 8.

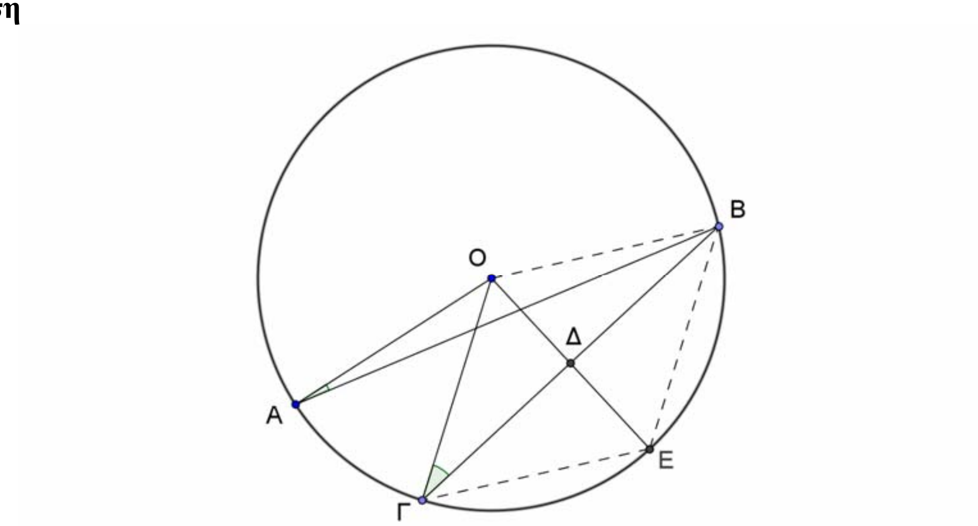
Άρα $(\mathrm{OAM}) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$ **.**

6. Σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O\hat{A}B} = 10^\circ$ και $\mathrm{O\hat{\Gamma}B} = 30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{B}A} = \mathrm{O\hat{A}B} = 10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OB} = R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{\Gamma}B} = \mathrm{O\hat{B}\Gamma} = 30^\circ.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{O\hat{B}\Gamma} - \mathrm{O\hat{B}A} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = 40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου ΟΓΒ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{\Gamma\hat{O}B}$, οπότε $\mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta} = 90^\circ - \mathrm{O\hat{\Gamma}\Delta} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, οπότε θα είναι και $\mathrm{\Gamma\hat{O}E} = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{\Gamma E} = \mathrm{O\Gamma} = R$. Επειδή η ευθεία ΟΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $\mathrm{EB} = \mathrm{\Gamma E} = R$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες , δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $\mathrm{O\Delta} = \mathrm{O\Gamma}\cdot \eta\mu 30^\circ = R\cdot\frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, οπότε $(\mathrm{OBE\Gamma}) = R\cdot\frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}$.

**75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014**

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}=\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}=\dfrac{x^2-1}{x^2-3}-\dfrac{6}{13}$,

οπότε για $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{2}=\dfrac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2-1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256}{81}-1}{\frac{256}{81}-3}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\dfrac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\dfrac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{100}=\frac{4n}{300}=\frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n=75k$, όπου k θετικός ακέραιος.. Έτσι, από την υπόθεση $170\le n\le 230$, έχουμε:

$$170\le n=75k\le 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75}\le k\le\frac{230}{75}\Leftrightarrow 2+\frac{20}{75}\le k\le 3+\frac{5}{75}\Leftrightarrow k=3.$$

Επομένως έχουμε $n=75\cdot 3=225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\dfrac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και του τετραπλεύρου ΑΒΔΖ, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

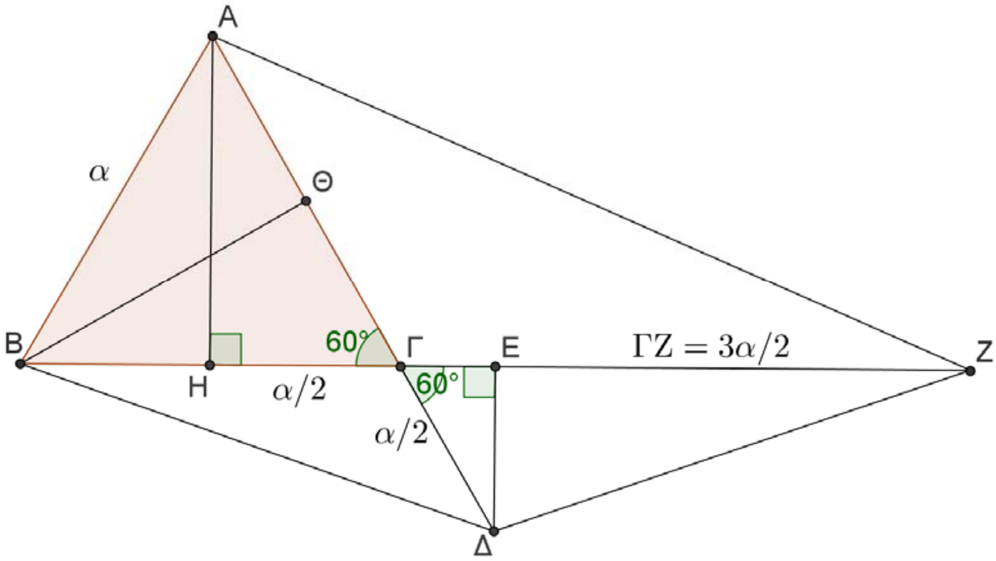
Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΔ έχει βάση $\mathrm{A}\Delta=\dfrac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$\mathrm{B}\Theta=\mathrm{AH}=\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{B}\Theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο ΑΒΔΖ έχουμε: $\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) + \mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z})$.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\mathrm{AH} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔΕ το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ και ΓΕΔ ως εξής:

$$\frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{AH}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A}\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{E\Delta}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $\mathrm{E\Delta} = \Gamma\Delta\,\eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) + \mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z}) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta})}{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z})} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2}=\frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2}=\frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2}=\lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta)=\lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1)=\lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2)=\lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}=\frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2+\lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2}=\frac{\beta(\Delta_1)^2+\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2}=\frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2}+\frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{\beta(\Delta_1)}{3}=\frac{\beta(\Delta_2)}{7}=\frac{\beta(\Delta_1)+\beta(\Delta_2)}{3+7}=\frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}=\frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}=\frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}=\frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2}+\frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2}=\left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2+\left(\frac{\beta(\Delta)}{\beta(\Delta)}\right)^2=\frac{9}{100}+\frac{49}{100}=\frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά 100-58 = 42%.

$76^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης . $\mathrm{A}=\frac{a-1}{\alpha-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$, αν $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Λύση

Έχουμε $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1}=\frac{16}{81}$ και

$$\mathrm{A}=\frac{a-1}{a-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}=\frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3}+\frac{1}{33}+\frac{16}{81}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$$

$$=\frac{\frac{65}{16}}{\frac{33}{16}}+\frac{1}{33}+\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{65}{33}+\frac{1}{33}+\frac{9}{27}=\frac{66}{33}+\frac{9}{27}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Πρόβλημα 2ο

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\frac{28}{\nu}$ και $\gamma=\frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha=4, \text{ για } \nu=7,\ \alpha=2, \text{ για } \nu=14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma=6, \text{για } \nu=7,\ \gamma=3, \text{ για } \nu=14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha=4,\ \gamma=6,$ για $\nu=7$ και $\alpha=2,\ \gamma=3,$ για $\nu=14$.

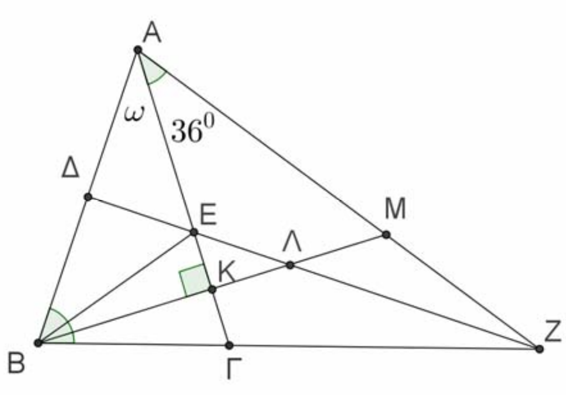
Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\omega^{\circ}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}=36^{\circ}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega=36^{\circ}$, **(β)** ΑΜ = ΓΖ, **(γ)** ΒΛ = ΛΖ.

Λύση



(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ θα έχουμε:

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \omega}{2}.$$

Επειδή η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ, το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΖΑ = ΖΒ, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \frac{180^\circ - \omega}{2} \Leftrightarrow 3\omega = 108 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K}.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΒ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = ΑΓ. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΒ έχουμε

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 180^\circ - 2\hat{\mathrm{B}} = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓΑΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ. Άρα έχουμε:

ΑΜ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΖ.

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε: $\Lambda\mathrm{BZ} = \mathrm{K}\mathrm{B}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Άρα έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Lambda\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 18^\circ \Rightarrow$ ΛΒΖ ισοσκελές τρίγωνο με ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = (x+y)\cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w = 1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m. Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z = 4, m = 5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x + y = 2 + 3 = 5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5\cdot 4^5 - 1 = 5\cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w = 5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z = 1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x + y$ είναι $x + y = 2 + 3 = 5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5\cdot 1^4 - 5 = 0$.

77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = \dfrac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\left(\alpha^3 - \beta\right)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

Λύση

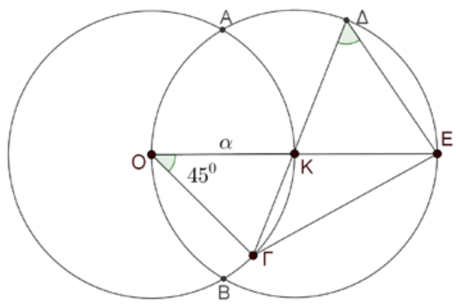
Έχουμε ότι $\alpha = \dfrac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1} = \left(\dfrac{12}{3}\right)^\nu : 2^{2\nu-1} = 4^\nu : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu-(2\nu-1)} = 2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4$, $\alpha^3 = 8$ και

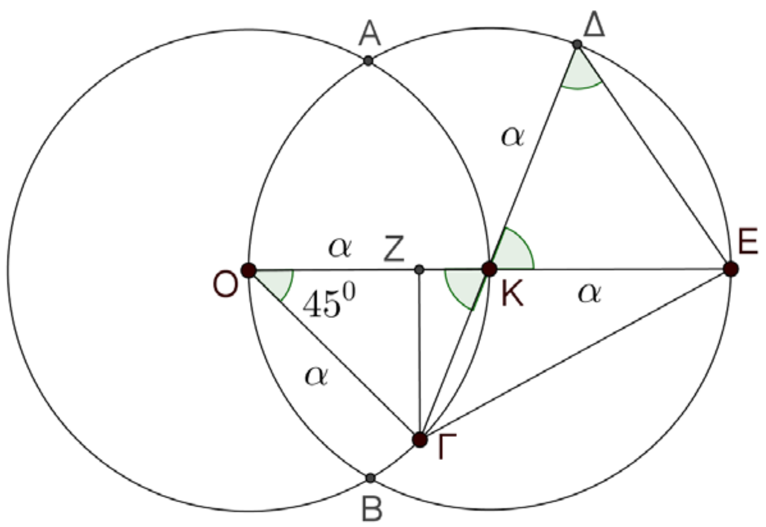
$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha} = \frac{(8-10)^3 + 40 - 20 + 8}{4 + 20 - 20} = \frac{-8 + 40 - 20 + 8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $K\hat{O}\Gamma = 45^\circ$, να βρείτε :



(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $K\hat{\Delta}E$,
(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α.



Σχήμα 2

$$O\hat{K}\Gamma = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\Delta\hat{K}E$ και $O\hat{K}\Gamma$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\Delta\hat{K}E = O\hat{K}\Gamma = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $K\hat{\Delta}E$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔΚΕ (έχει $K\Delta = KE = \alpha$), οπότε

$$\mathrm{K}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\Gamma\mathrm{Z} = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{O}\Gamma\Delta\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x, .όπου $x \geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος , πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x = 4$ ή $x = 5$. Όμως η τιμή $x = 4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450 : 4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x = 5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5} = 144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d\,.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d , ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{A}}{36} < \frac{\mathrm{B}}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\mathrm{A}}{36}, \frac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a, b, c, d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{\mathrm{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<\frac{3959}{36}<\frac{3960}{36}=110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν c = d = 0, άρα

$$\frac{\mathrm{B}}{45}=\frac{\overline{5c3d}}{45}>\frac{5030}{45}>111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{\mathrm{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}=\frac{\mathrm{B}}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{\mathrm{A}}{36}<110<111<\frac{\mathrm{B}}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109\leq\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}\leq 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b}>109\cdot 36\Leftrightarrow\overline{3a5b}>3924$, οπότε πρέπει $a=9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45}\leq 112\Leftrightarrow\overline{5c3d}<112\cdot 45\Leftrightarrow\overline{5c3d}<5040,$$

οπότε $c=0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

2017

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018$$

$$=\left(\left(-\frac{10}{2}\right)^{2\nu+1}+\left(+\frac{15}{3}\right)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^{2\nu}-\left(-\frac{4}{1}\right)^{2\nu}+2018$$

$$=\left((-5)^{2\nu+1}+(+5)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+(-4)^{2\nu}-(-4)^{2\nu}+2018$$

$$=\left(-5^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+2018=-5^{2\nu-1}\left(5^2-1\right)2017^2+2018$$

$$=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot2017^2+2018=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot4068289+2018.$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε A,B το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x)\cdot \mathrm{B}=80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathrm{A}=9\mathrm{B}$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $x\mathrm{A}=x(9\mathrm{B})=9x\mathrm{B}=9\cdot 40=360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360+80=440$ τ.μ.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa=0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

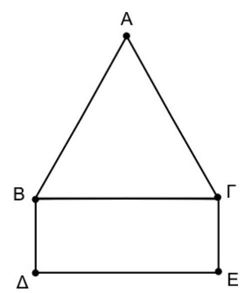
πολ.6+4 = πολ.3+3+1 =πολ.3+1,

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,4,7,8.

Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4 , 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Πρόβλημα 4



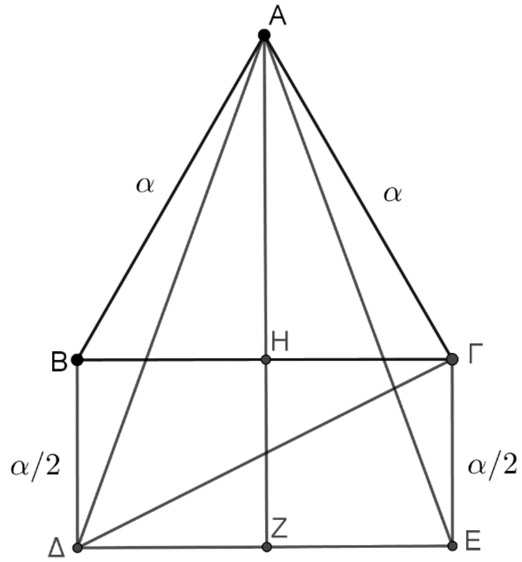
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $\mathrm{B\Delta}=\frac{\alpha}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$.

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.

Λύση

(α) (1ος τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ την τέμνει στο Η και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔΕ του ορθογωνίου στο Ζ. Τότε η ΑΗ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, οπότε ΒΗ = ΗΓ. Επειδή η ΑΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔΕ. Επομένως και τα τετράπλευρα ΒΔΖΗ, ΗΖΕΓ είναι ορθογώνια, οπότε ΒΗ = ΔΖ και ΗΓ = ΖΕ. Επομένως θα είναι και ΔΖ = ΖΕ. Έτσι η ΑΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔΕ, οπότε ΑΔ = ΑΕ.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν ίσες πλευρές $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \alpha$ και $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma E} = \frac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} + \mathrm{B\hat{\Gamma}E} = \mathrm{A\hat{\Gamma}E}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(\mathrm{AB\Delta}) = (\mathrm{ABH}) + (\mathrm{B\Delta ZH}) - (\mathrm{A\Delta Z}),$$

όπου

$$(\mathrm{ABH}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8},\ (\mathrm{B\Delta ZH}) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha+\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(\mathrm{AB\Delta}) = (\mathrm{ABH}) + (\mathrm{B\Delta ZH}) - (\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης $(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{B\Delta\Gamma}) - (\mathrm{AB\Delta})$. Όμως είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},(\mathrm{B\Delta\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{B\Delta\Gamma}) - (\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{8}.$$

2018

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$, τότε $\alpha=144,\ \beta=504,\ \gamma=1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha=72,\beta=144,\ \gamma=504$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\text{Α}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\text{Α}&=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200\\&=\left(\left(\frac{-20}{4}\right)^{11}+\left(\frac{-25}{-5}\right)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^{20}-\left(\frac{4}{1}\right)^{20}\right)+200\\&=\left((-5)^{11}+(+5)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left((-4)^{20}-4^{20}\right)+200\\&=\left(-5^{11}+5^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(4^{20}-4^{20}\right)+200=0\cdot(-2018)^2+0+200=200.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Λύση

Ονομάζουμε Α το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, Β του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι Α = 120 γραμμάρια και

$$\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2}=115\Leftrightarrow \text{Α}+\text{Β}=230\Leftrightarrow 120+\text{Β}=230\Leftrightarrow \text{Β}=230-120=110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{3}=115-10 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{3}=105 \Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=315 \Leftrightarrow \Gamma=330-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow \Gamma=315-(120+110) \Leftrightarrow \Gamma=315-230=85.$$

Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta}{4}=105-10 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta}{4}=95 \Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta=380$$

$$\Leftrightarrow \Delta=380-(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta=380-(120+110+85) \Leftrightarrow \Delta=380-315=65.$$

Επομένως το τέταρτο μήλο ήταν 65 γραμμάρια.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση

Πρέπει $x \neq 2 \ \textit{και} \ x \neq 6$. Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:

$$(x-1)(x-6)=(x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2-7x+6=x^2-(2+\alpha)x+2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x=2\alpha-6$$

Επομένως για $\alpha \neq 5$ έχουμε

$$x=\frac{2\alpha-6}{\alpha-5}=\frac{2(\alpha-5)+4}{\alpha-5}=2+\frac{4}{\alpha-5}.$$

Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής $(\alpha-5)$ να είναι διαιρέτης του 4, οπότε $\alpha-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Επομένως $\alpha \in \{1,3,4,6,7,9\}$.

Πρόβλημα 4

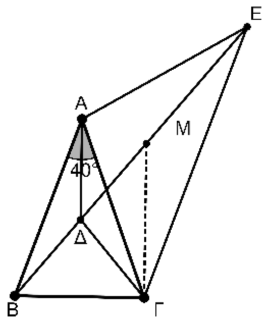
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=40°$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ.
Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:

(α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$.

(β) $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=100°$.

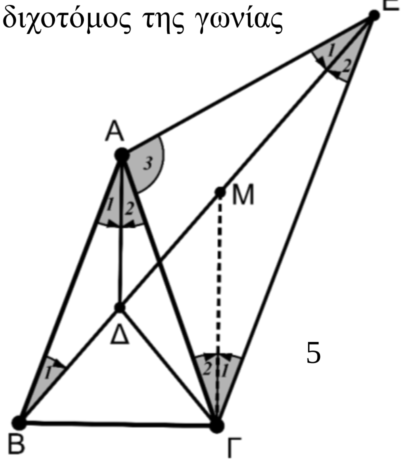
(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.

Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Λύση

(**α**) Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές (ΔΒ=ΔΓ), το σημείο Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Η κορυφή Α ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της ΒΓ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές). Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές (ΔΑ=ΔΒ) και $\widehat{A}_1 = 20°$, θα ισχύει $\widehat{B}_1 = 20°$. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$ και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180° \Leftrightarrow 20° + 20° + \widehat{A}_3 + 20° + 20° = 180°.$$

Άρα είναι: $\widehat{A}_3 = 100°$.

(γ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές (ΑΕ = ΑΓ) με $\Gamma\widehat{A}E = \widehat{A}_3 = 100°$, οπότε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 40°.$$

Ισχύει όμως $\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{A}_2 = 20°$ (διότι $\widehat{\Gamma}_2, \widehat{A}_2$ εντός εναλλάξ ΑΔ|| ΓΜ και ΑΓ τέμνουσα). Στο ερώτημα **(β)** είδαμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$. Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{E}_2 = 20°$, οπότε το τρίγωνο ΓΜΕ είναι ισοσκελές με ΜΓ = ΜΕ. Επομένως, το Μ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΓΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ, όπως και το Α, οπότε θα είναι ΑΜ⊥ΓΕ.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1