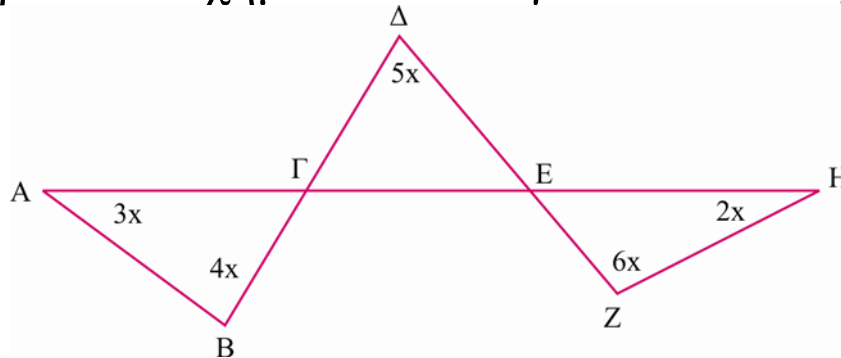




ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ' τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και $\alpha\beta\gamma=10$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $27p + 1$ είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2} \alpha \beta^{-1} + \frac{10}{3} \alpha^{-1} \beta = 3.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

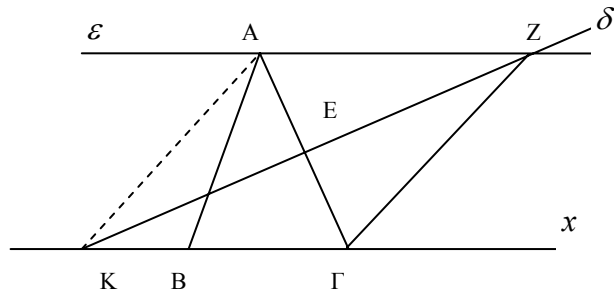
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $A > B$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$.



- (α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Z\hat{\Gamma}x$,
 (β) Να αποδείξετε ότι $KA = AZ$.

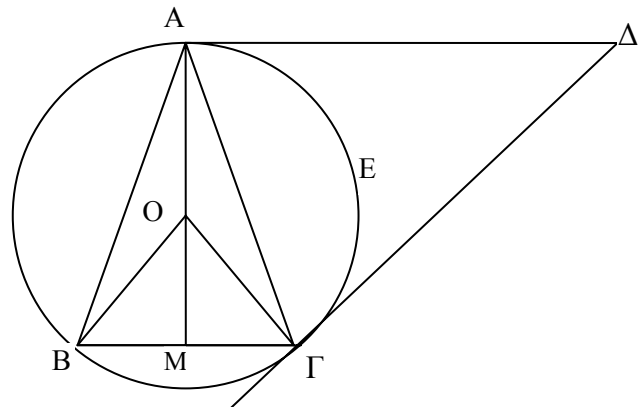
Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $A = aaabb$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$. Η $A\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη προς την $O\Gamma$.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $OAE\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = a$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = a$.

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{[1 - (-1)^{2009}]^0}$, $B = \frac{[(-2)^2 + (-1)^2]^2}{5} + \frac{x}{2}$.

Αν είναι $A = B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x .

Μονάδες 5

2. Το σημείο $A(-\lambda + 2, 4\lambda - 1)$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy . Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ ,

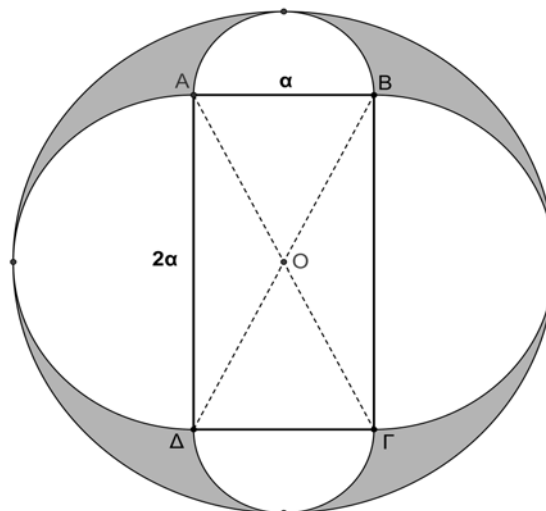
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OA και

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $OBA\Gamma$, όπου B, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο A στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy , αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \alpha$, $A\Delta = 2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής O των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Μονάδες 5



4. Αν ισχύει $\frac{45^v \cdot 2^{2v}}{6^v} = 900$, όπου v θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^v - (-1)^{v+1} + 4 \cdot (-1)^{v+2}.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν v είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4 \cdot (-1)^v + 2 \cdot \frac{(-1)^{2v+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3v}}{5}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta) : y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,6)$.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων Οxy, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2 , και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3 . Αν είναι

$r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$, όπου $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$ είναι τα

εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Γυμνασίου

1. Αν $x + y = 3 \cdot (-2)^2$ και $y - w = \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:
 $A = 7x + 10y - 3w - 87$.

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Στο εσωτερικό της γωνίας A φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα. Αν $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$, $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$ και το ύψος AH έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

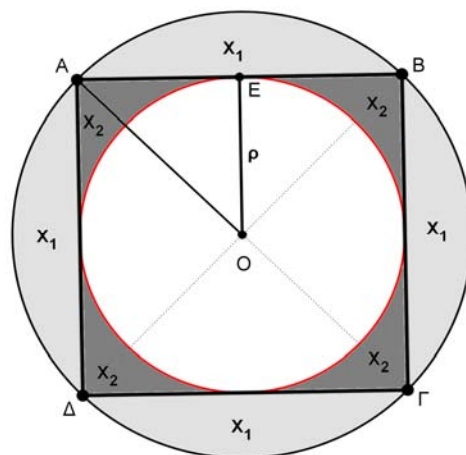
4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 2ρ . Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(O, OA)$ που ορίζονται από τις χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA . Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(O, \rho, OA)$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(O, \rho)$ και $C(O, OA)$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2 , αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$

μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O, x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O, \rho, OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $K(2, 8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4, -4)$ και $M(-1, 2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.

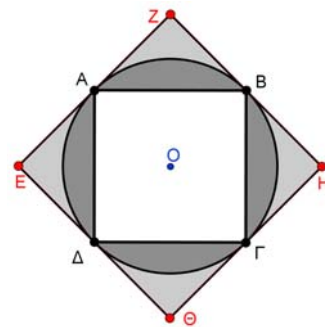
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(O, \rho)$ στα σημεία A, B, Γ και Δ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου $EZH\Theta$ και εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3,1415$).



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6},$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2

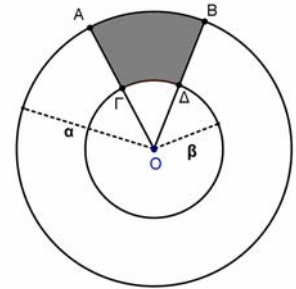
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν E του χωρίου $AB\Delta\Gamma$ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O, α) και (O, β) , $0 < \beta < \alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = \hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3.$$



Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = \alpha$ cm και $AB < A\Delta$. Η κάθετη από την κορυφή B προς τη διαγώνιο $A\Gamma$ την τέμνει στο σημείο E . Αν ισχύει ότι $E\Gamma = 2 \cdot AE$, να βρείτε:

- (i) το μήκος της πλευράς AB .
- (ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi' \chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi' \chi$ και στην ευθεία (ε) , ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi' \psi$ και στην ευθεία (ε) .

(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

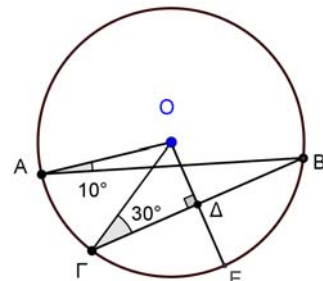
(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM .

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο $c(O, R)$ (κέντρου O και ακτίνας R) δίνονται σημεία A, Γ και B τέτοια ώστε $\widehat{OAB} = 10^\circ$ και $\widehat{O\Gamma B} = 30^\circ$. Τα σημεία A και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία OB . Από το σημείο O φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓB που την τέμνει στο σημείο Δ , ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο E .

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $OB\Gamma E$ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = \alpha\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.
Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$, αν $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \frac{28}{\nu}$ και $\gamma = \frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\widehat{BAG} = \omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\widehat{\Lambda Z} = 36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

- (α) $\omega = 36^\circ$,
- (β) $AM = \Gamma Z$,
- (γ) $BL = \Lambda Z$.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = (x + y) \cdot z^m - w$.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

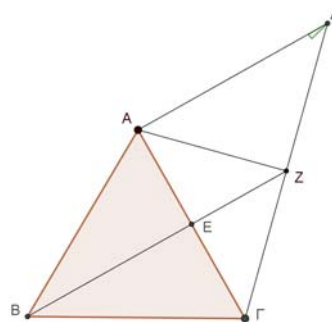
$$A = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ = α κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

(α) Να αποδείξετε ότι ΖΑ = ΖΓ.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΒ.



Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

2017

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} + \frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2\nu} + 2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} + \frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2\nu} + 2018 \\ &= \left(\left(-\frac{10}{2} \right)^{2\nu+1} + \left(+\frac{15}{3} \right)^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + \left(-\frac{8}{2} \right)^{2\nu} - \left(-\frac{4}{1} \right)^{2\nu} + 2018 \\ &= \left((-5)^{2\nu+1} + (+5)^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + (-4)^{2\nu} - (-4)^{2\nu} + 2018 \\ &= \left(-5^{2\nu+1} + 5^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + 2018 = -5^{2\nu-1} (5^2 - 1) 2017^2 + 2018 \\ &= -24 \cdot 5^{2\nu-1} \cdot 2017^2 + 2018 = -24 \cdot 5^{2\nu-1} \cdot 4068289 + 2018. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε Α, Β το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x) \cdot B = 80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $A = 9B$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $xA = x(9B) = 9xB = 9 \cdot 40 = 360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360 + 80 = 440$ τ.μ.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο A χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο A που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό A μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $k \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $k = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

$$\text{πολ.}6+4 = \text{πολ.}3+3+1 = \text{πολ.}3+1,$$

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2, 3, ..., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του A .

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό A που διαιρείται με όσο το δυνατόν περισσότερους από τους αριθμούς 2, 4, 7, 8.

Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4, 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

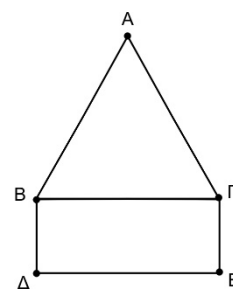
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς α . Το σχήμα $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά

$$B\Delta = \frac{\alpha}{2}.$$

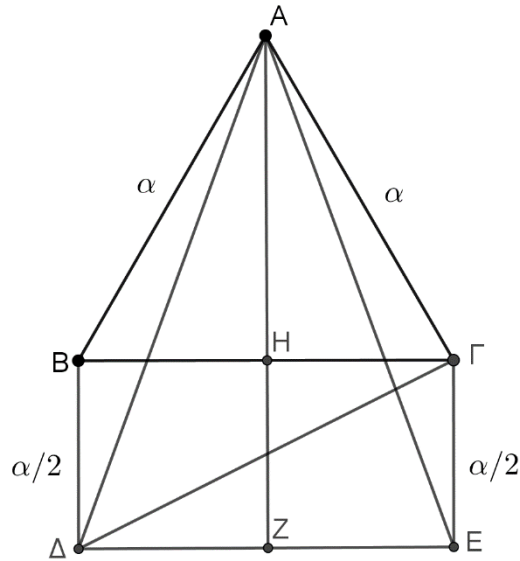
(α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = A\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$.



Λύση

(α) (1^{ος} τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή A προς την πλευρά $B\Gamma$ την τέμνει στο H και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔE του ορθογωνίου στο Z . Τότε η AH είναι μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$, οπότε $BH = H\Gamma$. Επειδή η AZ είναι κάθετη προς την πλευρά $B\Gamma$ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔE . Επομένως και τα τετράπλευρα $B\Delta ZH$, $H\Gamma ZE$ είναι ορθογώνια, οπότε $BH = \Delta Z$ και $H\Gamma = ZE$. Επομένως θα είναι και $\Delta Z = ZE$. Έτσι η AZ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔE , οπότε $A\Delta = A\Gamma$.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν ίσες πλευρές $AB = A\Gamma = \alpha$ και $B\Delta = \Gamma E = \frac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\hat{B}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{B}\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = \widehat{A\hat{\Gamma}B} + \widehat{B\hat{\Gamma}E} = \widehat{A\hat{\Gamma}E}.$$

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $A\Delta = AE$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z),$$

όπου

$$(ABH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}, \quad (B\Delta ZH) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(A\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha + \alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2(\sqrt{3}+1)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z) = \frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης $(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta)$. Όμως είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}, \quad (B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4}, \quad (AB\Delta) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2(2\sqrt{3}+1)}{8}.$$

2018

- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$, τότε $\alpha = 144$, $\beta = 504$, $\gamma = 1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{MK}\Delta(\beta, \gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha = 72$, $\beta = 144$, $\gamma = 504$.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200 \\ &= \left(\left(\frac{-20}{4} \right)^{11} + \left(\frac{-25}{-5} \right)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\left(\frac{-8}{2} \right)^{20} - \left(\frac{4}{1} \right)^{20} \right) + 200 \\ &= \left((-5)^{11} + (+5)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left((-4)^{20} - 4^{20} \right) + 200 \\ &= (-5^{11} + 5^{11}) \cdot (-2018)^2 + (4^{20} - 4^{20}) + 200 = 0 \cdot (-2018)^2 + 0 + 200 = 200. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: Ο μέσος όρος n αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ο αριθμός $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$.

Λύση

Ονομάζουμε A το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, B του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι $A = 120$ γραμμάρια και

$$\frac{A+B}{2} = 115 \Leftrightarrow A+B = 230 \Leftrightarrow 120+B = 230 \Leftrightarrow B = 230-120 = 110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma}{3} = 115 - 10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma}{3} = 105 \Leftrightarrow A+B+\Gamma = 315 \Leftrightarrow \Gamma = 330 - (A+B)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = 315 - (120 + 110) \Leftrightarrow \Gamma = 315 - 230 = 85.$$

Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4} = 105 - 10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4} = 95 \Leftrightarrow A+B+\Gamma+\Delta = 380$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 380 - (A+B+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta = 380 - (120 + 110 + 85) \Leftrightarrow \Delta = 380 - 315 = 65.$$

Επομένως το τέταρτο μήλο ήταν 65 γραμμάρια.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α , για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση

Πρέπει $x \neq 2$ και $x \neq 6$. Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:

$$(x-1)(x-6) = (x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = x^2 - (2+\alpha)x + 2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x = 2\alpha-6$$

Επομένως για $\alpha \neq 5$ έχουμε

$$x = \frac{2\alpha-6}{\alpha-5} = \frac{2(\alpha-5)+4}{\alpha-5} = 2 + \frac{4}{\alpha-5}.$$

Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής $(\alpha-5)$ να είναι διαιρέτης του 4, οπότε $\alpha-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Επομένως $\alpha \in \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$)

με $\hat{A} = 40^\circ$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: $\Delta A = \Delta B = \Delta \Gamma$.

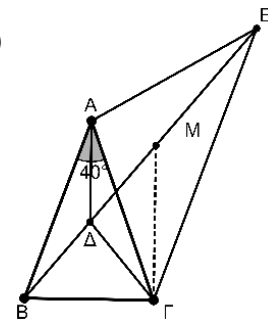
Αν η GM είναι παράλληλη στην $A\Delta$ και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$), να αποδείξετε ότι:

(α) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

(β) $\hat{G\hat{A}E} = 100^\circ$.

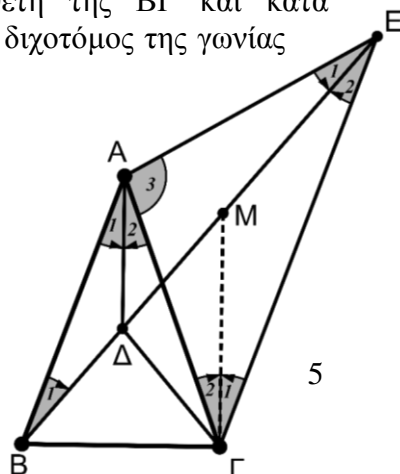
(γ) η AM είναι κάθετη στην GE .

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\Delta B = \Delta \Gamma$), το σημείο Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Η κορυφή A ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$ (διότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές). Άρα η $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετη της $B\Gamma$ και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο ΔB είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta B$) και $\widehat{A}_1 = 20^\circ$, θα ισχύει $\widehat{B}_1 = 20^\circ$. Το τρίγωνο $A B E$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 20^\circ + 20^\circ + \widehat{A}_3 + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ$.
Άρα είναι: $\widehat{A}_3 = 100^\circ$.

(γ) Το τρίγωνο $A E \Gamma$ είναι ισοσκελές ($A E = A \Gamma$) με $\widehat{A}_3 = 100^\circ$, οπότε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 40^\circ.$$

Ισχύει όμως $\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{A}_2 = 20^\circ$ (διότι $\widehat{\Gamma}_2, \widehat{A}_2$ εντός εναλλάξ $A \Delta \parallel \Gamma M$ και $A \Gamma$ τέμνουσα).

Στο ερώτημα (β) είδαμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20^\circ$. Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{E}_2 = 20^\circ$, οπότε το τρίγωνο $\Gamma M E$ είναι ισοσκελές με $M \Gamma = M E$. Επομένως, το M θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΓE του ισοσκελούς τριγώνου $A \Gamma E$, όπως και το A , οπότε θα είναι $A M \perp \Gamma E$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1